

Приборы и методы измерений  
2020. – Т. 11, № 1. – С. 22–32  
А.А. Джежора и др.

Devices and Methods of Measurements  
2020, vol. 11, no. 1, pp. 22–32  
A.A. Jezhora et al.

УДК: 621.317.39.084.2

# Математическая модель сенсора с открытой областью пространства

А.А. Джежора, Ю.А. Завацкий, А.В. Коваленко, А.М. Науменко

Витебский государственный технологический университет,  
Московский пр-т, 72, г. Витебск 210038, Беларусь

Поступила 03.12.2019

Принята к печати 02.03.2020

Для эффективного применения диэлектromетрических сенсоров большое значение имеет оптимизация конструктивных параметров сенсоров, таких как глубина проникновения электромагнитного поля, величина сигнала сенсора. Цель работы заключалась в построении математической модели сенсора с открытой областью пространства и расчёте его параметров.

Представлены результаты расчёта основных параметров сенсора открытого пространства. Для численного 2D моделирования использованы методы интегральных уравнений и зеркальных отображений. Поверхность каждого электрода рассматривалась в виде двух параллельных ламелей. Такой подход упростил процедуру численного решения двухмерной задачи. Он позволяет выполнять расчёт электрических полей плоских слоистых сред с меньшими временными затратами, с использованием менее мощных компьютеров. Программа численных расчётов реализована в *MAPLE*.

Проверка адекватности программы осуществлялась для сенсора, выполненного на одностороннем фольгированном тефлоне ( $\epsilon_1 = 2,3$ ) толщиной  $b = 1,0$  мм. Для сенсора выполнен расчёт электрического поля в трёхслойной среде. Расчётная картина поля показала неоднородность распределения силовых линий. Установлено, что глубина зоны контроля не зависит от металлизации поверхности сенсоров. Глубина зоны контроля для сенсора открытого типа лежит в том же диапазоне, что и глубина зоны контроля для плоских накладных измерительных конденсаторов – аналог *fringing electric field (FEF) sensors* (сенсоров окаймляющего электрического поля).

Созданная модель позволяет проводить обоснованный выбор конструкции и параметров электроёмкостного сенсора открытого типа, определять метрологические характеристики измерительного устройства, решать вопрос технической осуществимости поставленной задачи.

**Keywords:** сенсор, модель, диэлектрическая жидкость, точность.

**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

## Адрес для переписки:

А.А. Джежора  
Витебский государственный технологический университет,  
Московский пр-т, 72, г. Витебск 210038, Беларусь  
e-mail: jezhora@mail.ru

## Address for correspondence:

A.A. Jezhora  
Vitebsk State Technological University,  
Moskovsky Ave., 72, Vitebsk 210038, Belarus  
e-mail: jezhora@mail.ru

## Для цитирования:

А.А. Джежора, Ю.А. Завацкий, А.В. Коваленко, А.М. Науменко.  
Математическая модель сенсора с открытой областью пространства.  
Приборы и методы измерений.  
2020. – Т. 11, № 1. – С. 22–32.  
**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

## For citation:

A.A. Jezhora, Y.A. Zavatski, A.V. Kovalenko, A.M. Naumenko.  
[Mathematical Model of an Open Area of Space Sensor].  
*Devices and Methods of Measurements*.  
2020, vol. 11, no. 1, pp. 22–32 (in Russian).  
**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

# Mathematical Model of an Open Area of Space Sensor

A.A. Jezhora, Y.A. Zavatski, A.V. Kovalenko, A.M. Naumenko

Vitebsk State Technological University,  
Moskovsky Ave., 72, Vitebsk 210038, Belarus

Received 03.12.2019

Accepted for publication 02.03.2020

## Abstract

For the effective use of dielectric sensors, optimization of the design parameters of the sensors, such as the depth of penetration of the electromagnetic field and the magnitude of the sensor signal, is of great importance. The purpose of the work was to build a mathematical model of a sensor with an open area of space and calculate its parameters.

Results of main parameters calculations of the open space sensor are presented. Methods of integral equations and mirror images are used for numerical 2D modeling. The surface of each electrode was considered as two parallel lamellae. This approach simplified the procedure for numerically solving a two-dimensional problem. It allows you to calculate the electric fields of flat layered media with less time, using less powerful computers. The numerical calculation program is implemented in MAPLE.

The program adequacy was checked for a sensor made on one-sided foil Teflon ( $\epsilon_1 = 2,3$ ) with a thickness of  $b = 1.0$  mm. The electric field was calculated for the sensor in a three-layer medium. The calculated picture of the field showed that the distribution of force lines is not uniform. It was found that the depth of the control zone does not depend on the metallization of the sensor surface. The depth of the control zone for an open-type sensor is in the same range as the depth of the control zone for flat overhead measuring capacitorsan analog of fringing electric field (FEF) sensors.

**Keywords:** sensor, model, dielectric fluid, accuracy.

**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

---

## Адрес для переписки:

А.А. Джежора  
Витебский государственный технологический университет,  
Московский пр-т, 72, г. Витебск 210038, Беларусь  
e-mail: jezhora@mail.ru

## Для цитирования:

А.А. Джежора, Ю.А. Завацкий, А.В. Коваленко, А.М. Науменко.  
Математическая модель сенсора с открытой областью пространства.  
Приборы и методы измерений.  
2020. – Т. 11, № 1. – С. 22–32.  
**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

---

## Address for correspondence:

A.A. Jezhora  
Vitebsk State Technological University,  
Moskovsky Ave., 72, Vitebsk 210038, Belarus  
e-mail: jezhora@mail.ru

## For citation:

A.A. Jezhora, Y.A. Zavatski, A.V. Kovalenko, A.M. Naumenko.  
[Mathematical Model of an Open Area of Space Sensor].  
Devices and Methods of Measurements.  
2020, vol. 11, no. 1, pp. 22–32 (in Russian).  
**DOI:** 10.21122/2220-9506-2020-11-1-22-32

---

## Введение

Развитие Интернет вещей (*IoT – internet of things*, т. е. концепции вычислительных сетей физических предметов, оснащённых встроенными технологиями для взаимодействия друг с другом или с внешней средой), робототехники, автоматизации требует применения огромного количества сенсоров. Сенсоры позволяют построить мощные промышленные системы, устройства, исключить необходимость участия человека в управлении техпроцессами, облегчают жизнь в обществе. Так как изменения в диэлектрических свойствах обычно вызываются изменениями в различных физических, химических или структурных свойствах материалов, то диэлектрические измерения явились эффективным средством косвенной неразрушающей оценки интересующих параметров в различных производственных и научных исследованиях.

Для эффективного применения на практике диэлектрометрических сенсоров (анг. *interdigitated dielectrometry sensors – IDS*) большое значение имеет оптимизация их конструктивных параметров, таких как глубина проникновения поля, сила сигнала. Общие принципы проектирования диэлектрометрических сенсоров обсуждались многими исследователями [1–6]. Вопросы проектирования, оценки точности, чувствительности при доступе к материалу с одной стороны изложены в работе [2], неразрушающего тестирования – в [3, 4]; изучению концентрических кольцевых сенсоров с учётом толщины подложки посвящена работа [5], экранированных плоских сенсоров – [6, 7].

Развитие планарных технологий, применение лазеров при обработке материалов позволило создать гибкие сенсоры с широким диапазоном электрических, механических и тепловых характеристик [8, 9, 10]. По своей архитектуре они относятся к сенсорам с открытой областью пространства. Вопросы их проектирования и применения требуют разъяснения и моделирования [11, 12].

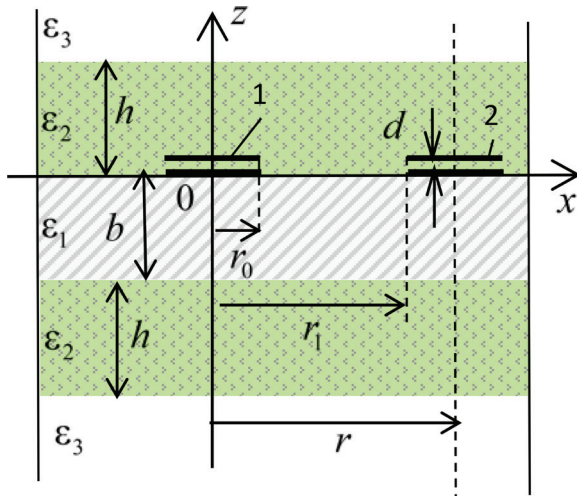
В отличие от плоского конденсатора *Maxwell* – область контроля сенсора с открытой областью пространства не определена, ограничена глубиной и шириной зоны контроля. Эти конструктивные особенности в значительной степени обуславливают функциональные возможности сенсора, характер источников погрешностей и меры их устранения. В литературе нет

строгого определения глубины зоны контроля, но одним из возможных способов её оценки является изучение того, насколько глубоко электрическое поле проникает в контролируемую среду. Координата, в которой достигается 97 % асимптотической ёмкости, определяется как глубина проникновения. Изменяя геометрические размеры электродов, можно повлиять на глубину зоны контроля сенсора, его чувствительность, динамический диапазон и уровень сигнала. Таким образом, конструкция сенсора может быть адаптирована к требованиям, предъявляемым к сенсору. Основная нагрузка при проектировании сенсоров ложится на математическое моделирование, осуществляемое аналитическими либо численными методами. Аналитические модели для ёмкостных сенсоров обычно базируются на упрощённых конфигурациях и идеализированных предположениях, которые ограничивают их точность расчёта для реальных конструкций [13] и могут приводить к расхождениям между теоретическими и экспериментальными данными. Для численных расчётов чаще всего используют пакеты *Ansoft Maxwell 2D, 3D, Comsol Multiphysics*. Следует выделить метод конечных элементов (*finite element method FEM*) [2], метод граничных интегральных уравнений [13], метод моментов [4]. Метод граничных интегральных уравнений является классическим математическим аппаратом и основан на сведении краевых задач к граничным интегральным уравнениям Фредгольма [14]. Последующая дискретизация интегральных уравнений даёт возможность получать и численные решения краевых задач. Преимуществом данного метода по сравнению с методом конечных элементов является отсутствие необходимости дискретизации всей области контроля сенсора и, как следствие, незначительное время расчёта [4, 7].

## Моделирование

Конструкция сенсора с открытым пространством представляет собой ленточный многосекционный накладной измерительный конденсатор. Его сечение показано на рисунке 1. Электрическое поле создаётся высокопотенциальными электродами 1 и низкопотенциальными электродами 2 (рисунок 1). Поле не ограничено в пространстве экраном в подложке. Низкопотенциальный электрод 2 имеет потенциал земли  $V_2$ . Область контроля определяется

геометрическими размерами секции сенсора: шириной секции  $r$ , межэлектродным расстоянием  $r_1 - r_0$ , толщиной электродов  $d$  и подложки  $b$ .



**Рисунок 1** – Секция сенсора открытого типа: 1 – высокопотенциальный электрод; 2 – низкопотенциальный электрод;  $r$  – ширина секции;  $r_1 - r_0$  – межэлектродное расстояние;  $d$  – толщина электродов;  $b$  – толщина подложки

**Figure 1** – Open sensor section: 1 – high-potential electrode; 2 – low-potential electrode;  $r$  – section width;  $r_1 - r_0$  – interelectrode distance;  $d$  – electrode thickness;  $b$  – substrate thickness

Для расчёта использовался метод зеркально-симметричных схем чувствительных элементов преобразователей. Сущность метода состоит в следующем:

- замкнутые эквипотенциальные поверхности источников поля каждого электрода заменяются разомкнутыми, т. е. изменяется топология зарядовых областей;
- эквивалентные поверхности каждого чувствительного элемента являются зеркальными друг относительно друга парами заряженных тонких поверхностей, разнесёнными в пространстве на расстояние, равное толщине электродов  $d$ , и имеющими тот же потенциал, что и исходные соответствующие им источники поля (рисунок 1).

В этом случае для новых источников поля с изменённой топологией поверхностей задача расчёта решается относительно искомой функции распределения плотности заряда  $\sigma(x_i)$  на зеркальных поверхностях с учётом значений потенциалов на них  $V_j$ . Зеркально-симметричная друг относительно друга пара заряженных поверхностей имитирует поле на краях источников и существенно упрощает задачу расчёта.

В методе зеркально-симметричных схем чувствительных элементов преобразователей граничные условия записываются для каждой пары заряженных поверхностей:

- на границе раздела двух сред  $i$  и  $i+1$  потенциал не испытывает скачок и остаётся постоянным  $V_i = V_{i+1}$ ;
- при отсутствии поверхностных зарядов на границе раздела диэлектриков нормальная составляющая вектора смещения непрерывна  $D_n^i = D_n^{i+1}$ ;
- тангенциальная составляющая вектора напряжённости непрерывна, т. е.  $E_\tau^i = E_\tau^{i+1}$ ;
- на границе раздела диэлектрика и зеркальной поверхности, несущей заряд, нормальная компонента вектора смещения равна поверхностной плотности заряда на этой поверхности:

$$\varepsilon_i \varepsilon_0 \partial V_j / \partial n = -\sigma_j,$$

где  $\varepsilon_i$  – диэлектрическая проницаемость соответствующей среды ( $i = 1, 2, 3$ );

- тангенциальная составляющая вектора напряжённости равна нулю на зеркальных поверхностях, несущих заряд, т. е.  $E_\tau = 0$ ;

– заряд источника поля определяется алгебраической суммой зарядов  $\sum_{j=1}^n q_j$  соответствующей пары заряженных тонких поверхностей, разнесённых в пространстве на расстояние, равное толщине источника поля  $d$  и имеющих тот же потенциал, что и исходный источник поля.

Потенциал же электрического поля  $V$  удовлетворяет уравнению Лапласа везде вне зависимости от системы источников поля. Он обращается в ноль на бесконечно удалённом расстоянии от электродов  $V|_\infty = 0$  и принимает заданные значения  $V_j$  на зеркальных друг относительно друга парах заряженных тонких поверхностей, разнесённых в пространстве на расстояние, равное толщине источников поля, и равен потенциалу соответствующих им источников:  $V|_{sj} = V_j$ ,  $V_j = \text{const}$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $N$  – число источников поля (число электродов).

В соответствии с предложенной гипотезой каждая пара заряженных эквипотенциальных поверхностей с потенциалом  $V_j$  и функциями распределения плотности заряда  $\sigma_j(x_j)$  имитируют соответствующий ей эквивалентный источник поля, включая область краев электродов.

В слоистых средах алгоритм расчёта плоскопараллельных полей заключается в следующей



последовательности выполнения математических операций [13]. Первоначально проводится модификации геометрии источников поля на основе использования зеркально-симметричных схем. Затем определяются координаты наведённых связанных зарядов на границах раздела диэлектриков путём введения расчётных отражённых зарядов для каждой эквипотенциальной пары, созданных заряжённых зеркально-симметричных поверхностей. Определяются коэффициенты пропускания, отражения, коэффициенты повторных отражений, согласно известному методу зеркальных отражений [13]. Интегральные уравнения записываются на основании размерности решаемых задач. Для расчёта плоскопараллельных полей, в случае 2D моделей, в качестве исходной базовой функции используется логарифмический потенциал. Интегральные уравнения решаются численным методом Крылова–Боголюбова относительно дискретных значений поверхностной плотности заряда  $\sigma_{pk}(x_i)$  на зеркальных друг относительно друга парах заряжённых тонких поверхностях, разнесённых в пространстве на расстояние, равное толщине электродов, и имеющих тот же потенциал, что и исходные, соответствующие им электроды. Потенциал произвольной точки поля рассчитывается после нахождения дискретных значений плотности заряда на всех заряжённых поверхностях.

## Метод интегральных уравнений

В силу того, что при работе электроёмкостных сенсоров частота электромагнитного поля  $\nu \leq 10^6$  Гц, то, как легко показать, соотношение между геометрическими размерами сенсора  $L_j$  и длиной электромагнитной волны  $\lambda$  удовлетворяют условию  $L_j/\lambda \ll 1$ , что позволяет рассматривать поля электроёмкостных сенсоров с позиции электростатики.

В качестве исходного выражения при составлении интегральных уравнений для потенциалов точек поверхности электродов использовалось выражение логарифмического потенциала:

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \ln \frac{1}{r_{MK}} \cdot \sigma,$$

где  $\sigma$  – заряд на отрезке  $l$  в сечении электрода;  $r_{MK}$  – расстояние между рассматриваемой точкой  $M$  и переменной точкой  $K$  (в которой расположен заряд, создающий поле в точке  $M$ ).

Для записи интегральных уравнений поверхностная плотность зарядов на электродах обозначалась двумя индексами. Первый индекс соответствует номеру электрода на рисунке 1, а второй – стороне поверхности электрода: 1 – соответствует поверхностной плотности заряда на стороне электрода, обращённой к контролируемому материалу, 2 – на стороне электрода, обращённой к подложке. Очевидно, в силу симметрии:

$$\sigma_{1k}(x) = \sigma_{1k}(-x); \quad \sigma_{2k}(x) = \sigma_{2k}(-x).$$

Промежутки интегрирования разбивались на участки, где искомые функции поверхностной плотности заряда  $\sigma(x)$  принимали постоянные значения. Это позволило в дальнейшем, согласно методу Крылова–Боголюбова, выносить их за знаки интегралов, преобразуя систему интегральных уравнений в систему линейных алгебраических уравнений. Границы интегрирования участков на поверхности электродов, обращённой к контролируемому материалу, записывались в виде:

$$\beta_i = r_0 \frac{1 - q_1^i}{1 - q_1^{n_1}}, \quad \alpha_i = r_0 \frac{1 - q_1^{i-1}}{1 - q_1^{n_1}},$$

$$\beta_i = r - r_0 \frac{1 - q_2^{i-n_1-1}}{1 - q_2^{n_2}}, \quad \alpha_i = r - r_0 \frac{1 - q_2^{i-n_1}}{1 - q_2^{n_2}},$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n_1 + n_2$ ;

на поверхности электродов, обращённой к подложке:

$$\beta_i = r_0 \frac{1 - q_3^{i-n_1-n_2}}{1 - q_3^{n_4}}, \quad \alpha_i = r_0 \frac{1 - q_3^{i-n_1-n_2-1}}{1 - q_3^{n_4}},$$

$$\beta_i = r - r_0 \frac{1 - q_4^{i-n_1-n_2-n_3-1}}{1 - q_4^{n_4}}, \quad \alpha_i = r - r_0 \frac{1 - q_4^{i-n_1-n_2-n_3}}{1 - q_4^{n_4}},$$

где  $i = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + \dots + n_4$ ;  $q_1, q_2, q_3, q_4$  – знаменатели геометрической прогрессии;  $n_1, n_2, n_3, n_4$  – числа разбиений поверхностей на участки для двух сторонах электродов:  $n_1$  и  $n_3$  для электрода 1 на верхней и нижней сторонах,  $n_2$  и  $n_4$  для электрода 2 на верхней и нижней сторонах.

Моделирование поля сенсора осуществлялось в трехслойной среде:

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \epsilon_3, & \text{если } h \leq z; \\ \epsilon_2, & \text{если } 0 < z \leq h; \\ \epsilon_1, & \text{если } -b < z \leq 0; \\ \epsilon_2, & \text{если } -h - b < z \leq -b; \\ \epsilon_3, & \text{если } z \leq -h - b. \end{cases}$$

Наведённые на границе раздела слоёв связанные заряды учитывались методом зеркальных отображений. Они заменялись сосредоточенными зарядами, отражёнными от границы раздела двух слоёв. Коэффициенты пропускания  $\beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{23}, \beta_{32}$ , коэффициенты отражений  $\lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{23}, \lambda_{32}$  и коэффициент двойных отражений  $\gamma$  вычислялись согласно [13]:

$$\beta_{kl} = \frac{2\varepsilon_l}{(\varepsilon_k + \varepsilon_l)}, \quad \lambda_{kl} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_l}{\varepsilon_k + \varepsilon_l}, \quad \gamma_{kl} = \left( \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_l}{\varepsilon_l + \varepsilon_k} \right)^2,$$

где  $k = 1, 2, 3; l = 1, 2, 3$ .

Воспользуемся следующими допущениями:

1) материал подложки не диспергирующий, т. е. диэлектрическая проницаемость подложки не является функцией частоты электромагнитного поля. Это допущение оправдано, потому что для частот, на которых, в основном, и происходят измерения, практически все диэлектрические материалы обладают незначительной дисперсией [13];

$$\Psi_{\theta i}(x_j, \chi) = \sum_{m=1}^N \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sigma_i(t)}{2} \ln \left| (2rm + t + x_j)^2 + \chi^2 \right| \left| (2rm - t + x_j)^2 + \chi^2 \right| \left| (2rm + t - x_j)^2 + \chi^2 \right| \left| (2rm - t - x_j)^2 + \chi^2 \right| dt +$$

$$+ \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \frac{\sigma_{\theta i}(t)}{2} \ln \left| (t - x_j)^2 + \chi^2 \right| \left| (t + x_j)^2 + \chi^2 \right| dt, \quad j = 1, \dots, n_1 + \dots + n_4,$$

где координаты точек  $x_j$  на поверхности электродов определяются выражением:  $x_j = (\alpha_j + \beta_j)/2$ ;  $N$  – число секций слева и справа от центральной секции;  $\alpha_i, \beta_i$  – границы участков интегрирования заряда, создающего поле в точке  $x_j$ ;  $\theta$  – номер плоскости в которой

2) материал подложки окружающей среды (воздух) контролируемого образца не обладает проводимостью  $\sigma = 0$ ;

3) длина электродов  $L$  не меньше поперечного сечения сенсора (краевые эффекты будут учитываться в соответствии с методикой);

4) линейные размеры сенсора во много раз меньше длины волны электромагнитного поля, создаваемого питающим напряжением, т. е. поле в сенсоре рассматривается как электростатическое.

На основании сделанных допущений задача расчёта электрического поля сенсора сводилась к расчёту электрического поля одной центральной секции размера  $r$ .

Поле сенсора создается зарядами каждой пары электродов, их отражениями. С целью сокращения записи для потенциалов точек  $x_j$ , лежащих на поверхности электродов, была введена функция:

расположены электроды;  $\theta = 1$  отвечает плоскость  $z = d$ ;  $\theta = 2$  плоскость  $z = 0$ .

В этом случае выражения для потенциалов точек на поверхностях электродов центральной секции, обращённых к контролируемому материалу ( $0 \leq x_j \leq r_0, r_1 \leq x_j \leq r, z = d$ ), запишутся в виде:

$$\sum_{i=1}^{n_1+\dots+n_2} \left[ \Psi_{1i}(x_j, 0) + \lambda_{21} \Psi_{1i}(x_j, 2d) + \sum_{s=1}^T \left[ \beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12}^{2s-1} \Psi_{1i}(x_j, 2(sb+d)) + \lambda_{23}^s \lambda_{21}^{s-1} \Psi_{1i}(x_j, 2(hs-d)) + \right. \right.$$

$$\left. + 2(\lambda_{23} \lambda_{21})^s \Psi_{1i}(x_j, 2sh) \right] + \sum_{s=2}^T \lambda_{21}^s \lambda_{23}^{s-1} \Psi_{1i}(x_j, 2(h(s-1)+d)) + \lambda_{23} (\beta_{21} \beta_{12})^2 \Psi_{1i}(x_j, 2(h+b+d)) +$$

$$+ \sum_{s=1}^T \left[ 2(\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23})^{2s} \Psi_{1i}(x_j, 2s(b+2h)) + 2(\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12} \lambda_{23})^s \Psi_{1i}(x_j, 2s(b+h)) \right] + \sum_{i=n_1+\dots+n_2+1}^{n_1+\dots+n_4} \left[ \Psi_{2i}(x_j, d) + \right.$$

$$+ \lambda_{21} \Psi_{2i}(x_j, 2d) + \sum_{s=1}^T \left[ \beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12}^{2s-1} \Psi_{2i}(x_j, 2sb+d) + \lambda_{23}^s \lambda_{21}^{s-1} \Psi_{2i}(x_j, 2sh-d) + \lambda_{23}^s \lambda_{21}^s \Psi_{2i}(x_j, 2sh-d) + \right.$$

$$+ \lambda_{23}^s \lambda_{21}^s \Psi_{2i}(x_j, 2sh+d) + \sum_{s=2}^T \lambda_{21}^s \lambda_{23}^{s-1} \Psi_{2i}(x_j, 2(h(s-1)+d)) + \lambda_{23} (\beta_{21} \beta_{12})^2 \Psi_{2i}(x_j, 2(h+b+d) +$$

$$+ \sum_{s=1}^T \left[ (\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23})^{2s} [\Psi_{2i}(x_j, 2s(b+2h)-d) + \Psi_{2i}(x_j, 2s(b+2h)+d)] + \right.$$

$$\left. + (\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23} \lambda_{21})^s [\Psi_{2i}(x_j, 2s(b+h)+d) + \Psi_{2i}(x_j, 2s(b+h)-d)] \right] = -\varepsilon_2 \varepsilon_0 2\pi V(x_j),$$

где  $j = 1, \dots, n_1 + \dots + n_2$ ;

для потенциалов точек на поверхностях элект-

родов, обращённых к подложке ( $0 \leq x_j \leq r_0$ ,  $r_1 \leq x_j \leq r$ ,  $z = 0$ ):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n_1+\dots+n_2} \left[ \psi_{2i}(x_j, d) + \lambda_{21} \psi_{1i}(x_j, d) + \sum_{s=1}^T \left[ \beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12}^{2s-1} \psi_{2i}(x_j, 2(sb+d)) + \lambda_{23}^s \lambda_{21}^{s-1} \psi_{2i}(x_j, 2(hs-d)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\lambda_{23} \lambda_{21})^s \psi_{2i}(x_j, 2sh-d) \right] + (\lambda_{23} \lambda_{21})^s \psi_{2i}(x_j, 2sh+d) \right] + \sum_{s=2}^T \lambda_{21}^s \lambda_{23}^{s-1} \psi_{2i}(x_j, 2(h(s-1)+d)) + \\ & + \lambda_{23} (\beta_{21} \beta_{12})^2 \psi_{2i}(x_j, 2(h+b)+d) + \sum_{s=1}^T \left[ (\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23})^{2s} + [\psi_{2i}(x_j, 2s(b+2h)-d) + \psi_{2i}(x_j, 2s(b+2h)+d)] + \right. \\ & \left. (\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12} \lambda_{23})^s [\psi_{2i}(x_j, 2s(b+h)+d) + \psi_{2i}(x_j, 2s(b+h)-d)] \right] + \sum_{i=n_1+\dots+n_2+1}^{n_1+\dots+n_4} [\psi_{2i}(x_j, 0) + \\ & + \sum_{s=1}^T [\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{12}^{2s-1} \psi_{2i}(x_j, 2sb) + \lambda_{23}^s \lambda_{21}^{s-1} \psi_{2i}(x_j, 2sh) + 2\lambda_{23}^s \lambda_{21}^s \psi_{2i}(x_j, 2sh) + \\ & + \sum_{s=2}^T \lambda_{21}^s \lambda_{23}^{s-1} \psi_{2i}(x_j, 2(h(s-1))) + \lambda_{21} \psi_{2i}(x_j, 0) + \lambda_{23} (\beta_{21} \beta_{12})^2 \psi_{2i}(x_j, 2(h+b)) + \sum_{s=1}^T [2(\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23})^{2s} + \\ & + [\psi_{2i}(x_j, 2s(b+2h)) + 2(\beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23} \lambda_{12})^s [\psi_{2i}(x_j, 2s(b+h))] ] ] = -\epsilon_2 \epsilon_0 2\pi V(x_j), \end{aligned}$$

где  $j = n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ ;  $T$  – число отражений.

С учетом, что общий заряд системы равен нулю:

$$\int_0^{r_0} (\sigma_{11}(t) + \sigma_{12}(t)) dt + \int_{r_1}^r (\sigma_{21}(t) + \sigma_{22}(t)) dt = 0,$$

составлялась система  $n_1 + \dots + n_4$  интегральных уравнений. Её решением являются дискретные значения функций распределения поверхностных зарядов  $\sigma_{11i}$ ,  $\sigma_{12i}$ ,  $\sigma_{21i}$ ,  $\sigma_{22i}$ . В выражениях для коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений фигурируют числовые ряды. Сходимость подобных рядов доказана в [13].

Для верхней пары электродов 1 и 2 ( $z = d$ ) частичная межэлектродная ёмкость  $C_{12}^B$ , одной секции вычисляется:

$$C_{12}^B = L \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \sigma_{21}(x_i) l_i / (V_1 - V_2),$$

для нижней пары ( $z = 0$ ):

$$C_{12}^H = L \sum_{i=n_1+\dots+n_3+1}^{n_1+\dots+n_4} \sigma_{22}(x_i) l_i / (V_1 - V_2),$$

где  $l_i = \beta_i - \alpha_i$ .

Межэлектродная рабочая ёмкость равна  $C_{12} = C_{12}^B + C_{12}^H$ . Так как частичная ёмкость  $C_{12}^H$  является паразитной и присутствует в измерениях за счёт потока поля в подложке, то её необходимо минимизировать за счёт выбора материала подложки, соотношения межэлектродного зазора и толщины подложки  $b$ .

Программы для моделирования полей сенсора были написаны с использованием системы компьютерной математики *MAPLE*.

## Моделирование, экспериментальные результаты

Выбор шагов разбиения поверхности электродов для заданного числа участков  $n_1 + \dots + n_4$ , проверка сходимости численных расчётов ёмкости с точными решениями проводилась для частного случая однородной среды ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ), когда накладной измерительный конденсатор находился в воздухе, а толщина электродов бесконечно мала  $d = 0,001$  мм. Такая конструкция описана в работе [13]. Значения ёмкостей для неё вычислялись методами конформных отображений и непосредственного определения напряжённости электрического поля. Расхождения в вычислении межэлектродных ёмкостей составляют менее 0,01 %.

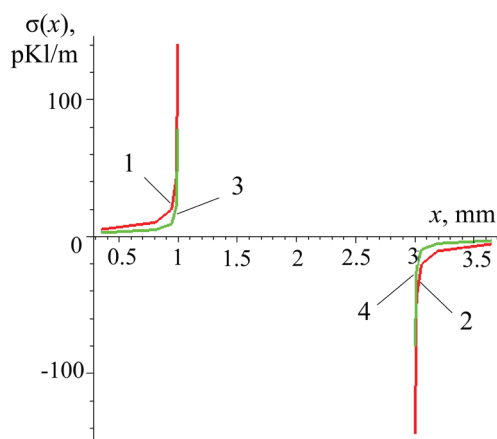
Проверка адекватности модели реальной конструкции осуществлялась для сенсора, выполненного на одностороннем фольгированном тефлоне ( $\epsilon = 2,3$ ) толщиной  $b = 1$  мм, толщина фольги (электродов)  $d = 0,035$  мм с длиной электродов  $L = 62$  мм, числом секций 6, размер секции  $r = 4$  мм, ширина электродов  $r_0 = 1$  мм, металлизация поверхности сенсора  $2r_0/r = 0,5$ . При технологическом травлении электродов не удалось выдержать все размеры электродов строго. Поэтому с помощью микроскопа проводились измерения геометрических размеров электродов. Затем находились средние значения геометрических размеров электродов, вычислялась металлизация  $w$  поверхности (металлизация поверхности сенсора – часть поверхности, занятая металлическими электродами), проводились расчёты.

Задача оптимизации расчётов сводилась к отысканию лишь одного оптимального значения знаменателя геометрической прогрессии  $q$ , которому соответствует максимальное значение расчетной ёмкости  $C_{12}$  между электродами 1 и 2 при заданном числе интервалов  $n$ , разбиения поверхностей электродов. Это связано с тем, что сходимость расчётного значения ёмкости сенсора с точным значением в зависимости от  $n$  происходит снизу. Наибольшее значение расчётной ёмкости  $C_{12}$  между электродами 1 и 2 было достигнуто при шаге интегрирования  $q = 0,3$  для  $n_i = 5$ . Относительная ошибка численного расчёта, соответствующая этому шагу интегрирования, составила 1,65 %.

### Расчёт поля сенсора, построение картины поля

Для этого же сенсора выполнялся расчёт электрического поля в трёхслойной среде:

$$V(x, z) = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 2\pi} \left[ \sum_{i=1}^{n_1 + \dots + n_2} [\beta_{21} \psi_{1i}(x, d + z) + \beta_{21} \lambda_{23} \psi_{1i}(x, 2h - d + z) + \beta_{21} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2b + d - z) + \right. \\ + \beta_{21}^2 \beta_{12} \lambda_{23} \psi_{1i}(x, 2(h + b) + d - z) + \lambda_{23} \beta_{21} \lambda_{21} \psi_{1i}(x, 2h + d + z) + \lambda_{23} \beta_{21}^2 \beta_{12} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) + d + z) + \\ + \beta_{21} \lambda_{12}^2 \psi_{1i}(x, 2b + d + z) + \lambda_{23}^2 \beta_{21}^3 \beta_{12}^2 \psi_{1i}(x, 2(2h + b) + d + z) + \lambda_{23} \beta_{21}^2 \beta_{12} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) + d + z) + \\ + \beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) - d - z) + \lambda_{23}^2 \beta_{21}^2 \beta_{12} \psi_{1i}(x, 2(2h + b) - d - z)] + \sum_{i=n_1 + \dots + n_2 + 1}^{n_1 + \dots + n_4} [\beta_{21} \psi_{2i}(x, z) + \\ + [\lambda_{23} \beta_{21} \psi_{2i}(x, 2h + z) + \lambda_{12} \beta_{21} \psi_{2i}(x, 2b - z) + \lambda_{23} \beta_{21}^2 \beta_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) - z) + \lambda_{23} \lambda_{21} \beta_{21} \psi_{2i}(x, 2h + z) + \\ + \lambda_{23} \beta_{21}^2 \beta_{12} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) + z) + \beta_{21} \lambda_{12}^2 \psi_{1i}(x, 2b + z) + \lambda_{23}^2 \beta_{21}^3 \beta_{12}^2 \psi_{1i}(x, 2(2h + b) + z) + \\ + \lambda_{23} \beta_{21}^2 \beta_{12} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) + z) + \beta_{21} \beta_{12} \lambda_{23} \lambda_{12} \psi_{1i}(x, 2(h + b) - z) + \lambda_{23}^2 \beta_{21}^2 \beta_{12}^2 \psi_{1i}(x, 2(2h + b) - z)].$$



**Рисунок 2** – Распределение поверхностной плотности заряда на электродах: 1, 2 – со стороны контролируемого диэлектрика; 3, 4 – со стороны подложки

**Figure 2** – Distribution of surface charge density on the electrodes: 1, 2 – from the side of the controlled dielectric; 3, 4 – from the side of the substrate

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_3 = 1, & \text{если } 1 \leq z; \\ \varepsilon_2 = 3, & \text{если } 0 < z \leq 1; \\ \varepsilon_1 = 2, 3, & \text{если } -1 \leq z \leq 0; \\ \varepsilon_2 = 3, & \text{если } -2 < z \leq -1; \\ \varepsilon_3 = 1, & \text{если } z \leq -2. \end{cases}$$

Визуализация поля проводилась после нахождения дискретных значений распределения поверхностной плотности заряда  $\sigma_{1k}(x)$ ,  $\sigma_{2k}(x)$  на электродах сенсора, выполненного на подложке из тефлона толщиной  $b = 1,00$  мм. Толщина фольги (электродов)  $d = 0,035$  мм, длина электродов  $L = 62$  мм, число секций  $N = 6$ , размер секции  $r = 4$  мм, ширина электродов  $r_0 = 1$  мм, металлизация поверхности сенсора  $2r_0/r = 0,5$ . Расчётное распределение заряда представлено на рисунке 2. Значения потенциалов точек поля рассчитывались в подложке  $-b < z \leq 0$ :

Аналогичные расчёты проводились и в остальных средах. В итоге были получены массивы значений потенциала  $V(x, z)$ . Из полученных массивов выделялись подмассивы с координатами, дискретно описывающими значения эквипотенциальных линий. Для построения линий напряжённости пользовались свойством: в каждой точке поля линии эквипотенциалов и линии напряжённости перпендикулярны. При этом учитывалось, что эквипотенциальные линии задаются дискретными точками.

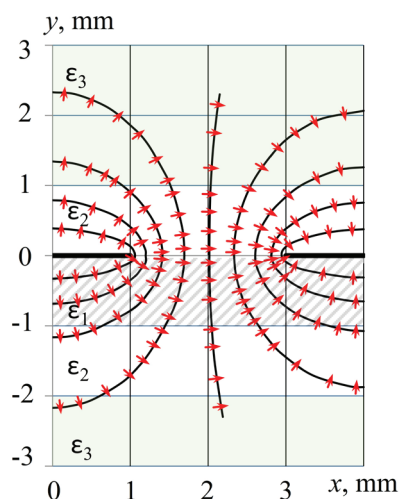
В связи с этим было принято решение изобразить линии напряжённости в виде векторов напряжённости с нормированной длиной. Выбирая координаты ближайших точек линии эквипотенциалов  $M_i(x_i; y_i)$  и  $M_{i+1}(x_{i+1}; y_{i+1})$ , строился вектор  $\mathbf{E}_i(y_{i+1} - y_i; x_i - x_{i+1})$ , удовлетворяющий  $\mathbf{E}_i \perp M_i M_{i+1}$ . Для соответствия масштабирования вводился коэффициент  $k$  и, учитывалась нормировка. Затем строился вектор напряжённости электрического поля:



$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} \frac{(y_{i+1} - y_i) \cdot k}{4 \cdot |\mathbf{E}_i|} + \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \\ \frac{(x_i - x_{i+1}) \cdot k}{4 \cdot |\mathbf{E}_i|} + \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \end{pmatrix}.$$

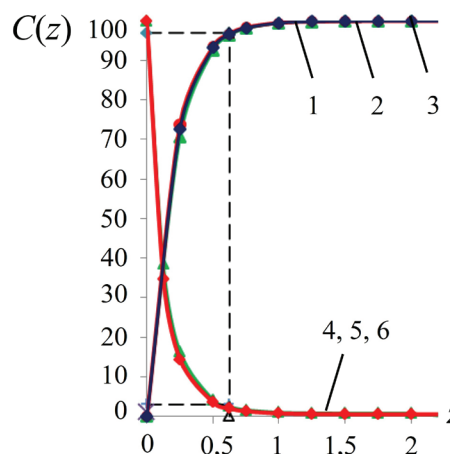
Расчётная картина электрического поля сенсора представлена на рисунке 3. Картина поля даёт представление о ходе силовых линий, о его распределении. Видно, что поле неоднородно. Точное значение глубины проникновения электрического поля определить невозможно [13, 5, 15]. Для сенсоров окаймляющего электрического поля с экраном в подложке эмпирически связь между глубиной проникновения  $h$  и пространственным периодом электродов  $2r$  примерно принимается [15]:  $h = 2r/4 \div 2r/3$ , где  $h$  – эффективная глубина проникновения электрического поля,  $r$  – размер секции. Глубина зоны контроля для сенсора открытого типа оценивалась из зависимости нормированной ёмкости  $C(z)$  от относительного расстояния  $z = h/r$  до плоскости, в которой лежат электроды (рисунок 4). Глубина зоны контроля соответствует положению  $z_0$ , когда различие между ёмкостью в положении  $z_0$  и максимальной ёмкостью  $C_{\max}$  ( $z = \infty$ ) равно 3 % от различия между самой максимальной и минимальной ёмкостями:

$$C(z_0) = \frac{C - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} 100\% = 3\%.$$



**Рисунок 3** – Расчётная картина электрического поля сенсора с  $b = 1$  мм и  $r = 4$  мм: стрелками указаны векторы напряжённости, сплошными – эквипотенциальные линии поля сенсора

**Figure 3** – The calculated picture of the electric field of the sensor with  $b = 1$  mm and  $r = 4$  mm: arrows indicate the intensity vectors, solid – equipotential lines of the sensor field



**Рисунок 4** – Зависимость нормированной ёмкости  $C(z)$  от относительного расстояния  $z$ . Кривые 1, 2, 3 для металлизации поверхности 0,25, 0,5 и 0,75 (увеличение слоя диэлектрика), кривые 4, 5, 6 для металлизации поверхности 0,25, 0,5 и 0,75 (уменьшение слоя диэлектрика)

**Figure 4** – The dependence of the normalized capacitance  $C(z)$  on the relative distance  $z$ . Curves 1, 2, 3 for metallization of the surface 0.25, 0.5, and 0.75 (increase in the dielectric layer), curves 4, 5, 6 for metallization of the surface 0.25, 0.5, and 0.75 (reduction of the dielectric layer)

Кривые 1, 2, 3 построены для сенсоров с металлизацией поверхности 0,25, 0,5 и 0,75 соответственно и относятся к случаю увеличения слоя жидкого диэлектрика, кривые 4, 5, 6 к его уменьшению. Анализ кривых говорит о совпадении глубин зон контроля независимо от металлизации поверхности сенсоров. Глубина зоны контроля для сенсора открытого типа лежит в том же диапазоне, что и глубина зоны контроля для сенсоров окаймляющего электрического поля.

## Заключение

Разработана модель, позволяющая проводить обоснованный выбор конструкции и параметров электроёмкостного сенсора открытого типа, определять метрологические характеристики измерительного устройства, решать вопрос технической осуществимости поставленной задачи. Отсутствие экрана в подложке является существенным моментом при контроле диэлектрических жидкостей.

Разработки устройств контроля диэлектрической проницаемости жидкостей посредством зеркально-симметричных сенсоров со щитом

Фарадея позволят проводить экспресс контроль вне лабораторий, осуществлять удалённый мониторинг смазочных, трансформаторных масел, гидравлических жидкостей. При этом численные расчёты не требуют серьёзного компьютерного обеспечения. Расчёты выполняются с высокой точностью.

### Список использованных источников

1. Hu, X. Planar capacitive sensors—designs and applications / X. Hu, W. Yang // *Sensor Review*. – 2010. – Vol. 30, no. 1. – P. 24–39.

**DOI:** 10.1108/02602281011010772

2. Mamishev, A.V. Interdigital sensors and transducers / A.V. Mamishev, K. Sundara-Rajan, F. Yang, Y. Du, M. Zahn // *Proceedings of the IEEE*. – 2004. – Vol. 92, iss. 5. – P. 808–845.

**DOI:** 10.1109/JPROC.2004.826603

3. Diamond, G.G. Single-sided capacitive imaging for NDT / G.G. Diamond [et al.] // *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*. – 2006. – Vol. 48, no. 12. – P. 724–730.

**DOI:** 10.1784/insi.2006.48.12.724

4. Chen, T. Analysis of a concentric coplanar capacitive sensor for nondestructive evaluation of multi-layered dielectric structures / T. Chen, N. Bowler // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*. – 2010. – Vol. 17, iss. 4. – P. 1307–1318.

**DOI:** 10.1109/TDEI.2010.5539703

5. Li, X.B. Design principles for multichannel fringing electric field sensors / X.B. Li, S.D. Larson, A.S. Zyuzin, A.V. Mamishev // *IEEE Sensors Journal*. – 2006. – Vol. 6, iss. 2. – P. 434–404. **DOI:** 10.1109/JSEN.2006.870161

6. Sheiretov, Y. Modeling of Spatially Periodic Dielectric Sensors in the Presence of a Top Ground Plane Bounding the Test Dielectric / Y. Sheiretov, M. Zahn // *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* – 2005. – V. 12, no. 5. – P. 993–100. **DOI:** 10.1109/TDEI.2005.1522192

7. Джежора, А.А. Принципы проектирования накладных измерительных конденсаторов в присутствии заземленной плоскости / А.А. Джежора [и др.] // *Приборы и методы измерений*. – 2011. – № 2(3). – С. 109–115.

8. Han, T. Multifunctional Flexible Sensor Based on Laser-Induced Graphene / T. Han [et al.] // *Sensors*. – 2019. – Vol. 19, no. 16. – P. 3477–3492.

**DOI:** 10.3390/s19163477

9. Zuk, S. Capacitive sensors realized on flexible substrates / S. Zuk, A. Pietrikova // *Electroscope*. – 2017. – Vol. 17, no. 2. – P. 1–5.

10. Khan, S. Technologies for printing sensors and electronics over large flexible substrates / S. Khan, L. Lorenzelli, R.S. Dahiya // *IEEE Sensors Journal*. –

2015. – Vol. 15, iss. 6. – P. 3164–3185.

**DOI:** 10.1109/JSEN.2014.2375203

11. Starzyk, F. Parametrisation of interdigit comb capacitor for dielectric impedance spectroscopy / F. Starzyk // *Archives of Materials Science and Engineering*. – 2008. – Vol. 34, iss. 1. – P. 31–34.

12. Thibault, P. On the design of capacitive sensors using flexible electrodes for multipurpose measurements / P. Thibault [et al.] // *Review of scientific instruments*. – 2007. – Vol. 78, iss. 4. – P. 043903.

**DOI:** 10.1063/1.2721406

13. Джежора, А.А. Электроёмкостные преобразователи и методы их расчета. – Минск: «Издательский дом «Белорусская наука», 2007. – 305 с.

14. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А. Уравнения математической физики: 7-е изд. М.: Изд-во МГУ; Изд-во «Наука», 2004.

15. Kim, C. Numerical analysis on effective electric field penetration depth for interdigital impedance sensor / C. Kim [et al.] // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2013. – Vol. 418, no. 1. – P. 012020.

**DOI:** 10.1088/1742-6596/418/1/012020

### References

1. Hu X., Yang W. Planar capacitive sensors—designs and applications. *Sensor Review*, 2010, vol. 30, no. 1, pp. 24–39. **DOI:** 10.1108/02602281011010772

2. Mamishev A.V., Sundara-Rajan K., Yang F., Du Y., Zahn M. Interdigital sensors and transducers. *Proceedings of the IEEE*, 2004, vol. 92, no. 5, pp. 808–845. **DOI:** 10.1109/JPROC.2004.826603

3. Diamond G.G., Hutchins D.A., Gan T.H., Purnell P., Leong K.K. Single-sided capacitive imaging for NDT. *Insight-Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 2006, vol. 48, no. 12, pp. 724–730.

**DOI:** 10.1784/insi.2006.48.12.724

4. Chen T., Bowler N. Analysis of a concentric coplanar capacitive sensor for nondestructive evaluation of multi-layered dielectric structures. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 1307–1318. **DOI:** 10.1109/TDEI.2010.5539703

5. Li X.B., Larson S.D., Zyuzin A.S., Mamishev A.V. Design principles for multichannel fringing electric field sensors. *IEEE Sensors Journal*, 2006, vol. 6, pp. 434–404. **DOI:** 10.1109/JSEN.2006.870161

6. Sheiretov Y., Zahn M. Modeling of Spatially Periodic Dielectric Sensors in the Presence of a Top Ground Plane Bounding the Test Dielectric. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2005, vol. 12, no. 5, pp. 993–100. **DOI:** 10.1109/TDEI.2005.1522192

7. Jezhora A.A., Kuzmitch A.I., Radevich E.I., Rubanik V.V. [Principles of designing of fringing electric field sensors in the presence of a top ground plane

bounding]. *Devices and Methods of Measurements*, 2011, no. 2, pp. 109–115 (in Russian).

8. Tao H., Anindya N., Roy B.V., Simorangkir B., Afsarimanesh N., Liu H., Mukhopadhyay S.C., Xu Y., Zhadobov M., Sauleau R. Multifunctional Flexible Sensor Based on Laser-Induced Graphene. *Sensors*, 2019, vol. 19, no. 16, pp. 3477–3492. **DOI:** 10.3390/s19163477

9. Zuk S., Pietrikova A. Capacitive sensors realized on flexible substrates. *ElectroScope*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 1–5.

10. Khan S., Lorenzelli L., Dahiya R.S. Technologies for printing sensors and electronics over large flexible substrates. *IEEE Sensors Journal*, 2015, vol. 15, pp. 3164–3185. **DOI:** 10.1109/JSEN.2014.2375203

11. Starzyk F. Parametrisation of interdigit comb capacitor for dielectric impedance spectroscopy. *Archives of Materials Science and Engineering*, 2008, vol. 34, iss. 1, pp. 31–34.

12. Thibault P., Diribarne P., Fournier T., Perraud S., Puech L., Wolf P.E., Vallcorba R. On the de-

sign of capacitive sensors using flexible electrodes for multipurpose measurements. *Review of scientific instruments*, 2007, vol. 78, iss. 4, 043903 p.

**DOI:** 10.1063/1.2721406

13. Jezhora A.A. *Elektroyemkostnyye preobrazovateli i metody ikh rascheta* [Electric capacity converters and methods of their calculation]. Minsk, Publishing house of the Belarusian science, 2008, 305 p.

14. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki: 7-e izdanie* [Equations of mathematical physics: 7th ed]. Moscow, Moscow St. Univ. Publ., Nauka Publ., 2004, 798 p.

15. Kim C.U., Li G., Li J., Jong H., Ro C., Song Y., Pak G., Im S. Numerical analysis on effective electric field penetration depth for interdigital impedance sensor. *Journal of Physics: Conference Series*, 2013, vol. 418, no. 1, 012020 p.

**DOI:** 10.1088/1742-6596/418/1/012020